Métodos Estocásticos em Economia e Finanças
02/2017 - 01/2018 - 02/2018
(Mestrado e Doutorado)

O curso de métodos estocásticos em economia e finanças 1, 2 e 3 é uma sequência de três matérias consecutivas que abarcam três áreas da matemática: a Teoria da Medida e Integração; a Teoria da Probabilidade fundada na teoria da medida; o cálculo estocástico. Os dois primeiros cursos formam uma única disciplina dividida em dois semestres. Nelas cobrimos o livro de Patrick Billingsley, *Probability and Measure*, em que a Teoria da Medida e a Teoria da Probabilidade são apresentadas de forma entrelaçada. Portanto, o aluno que decidir cursar o 1º curso deve ter em mente cursar também o 2º. Já o 3º curso pode ser cursado separadamente, desde que o aluno domine teoria da medida e a teoria da probabilidade axiomática à la Kolmogorov. Caso não domine, recomenda-se cursar os dois primeiros. O livro adotado é o de Michael Steele, *Stochastic Calculus and Financial Applications.*

As três disciplinas da sequência são de 4 créditos (60 horas) cada. Entretanto, o aluno deverá matricular-se também numa disciplina optativa de 2 créditos na área quantitativa. Cada curso da sequência corresponderá, na prática, a 6 créditos (90 horas), perfazendo um total de 270 horas-aula.

Existe, entre o final do curso 2 e a primeira metade do curso 3, uma interseção: teoria de martingales e movimento browniano (BM). Porém, os enfoques são distintos. No 2º curso estudaremos martingales em tempo discreto, já no 3º passaremos novamente por martingales em tempo discreto, porém com demonstrações diferentes em algumas partes, e, além disso, veremos martingales em tempo contínuo. O BM é apresentado no 2º curso com o enfoque de cilindros mensuráveis; no 3º curso apresentamos o BM sob o enfoque de *wavelets*, que são expansões em série.

O pré-requisito matemático é um conhecimento mediano de Análise Real e topologia de espaços métricos. Em sala, o professor apresentará todos os resultados e abrirá todas as demonstrações. Essa é a razão pela qual o estudo do livro do Billingsley requer duas disciplinas de 6 créditos, um total de 180 horas.

Depois dos três cursos, espera-se que o aluno esteja apto para enveredar pela área de finanças matemáticas, séries temporais ou outras áreas da matemática aplicada.

Métodos Estocásticos em Economia e Finanças, 1 (2º semestre de 2017)

O aluno deve matricular-se em:
ECO 304301 Métodos Estocásticos em Economia e Finanças 1 (4 créditos)
ECO 332798 Tópicos Especiais em Métodos Quantitativos (2 créditos)
Horário: SEG: 10:00-12:00h e TER, QUI: 8:00-10:00h.

1. Teorema dos números normais de Borel: expansão diádica, leis forte e fraca dos grandes números.
2. Medidas de probabilidade: classes de subconjuntos, medidas de probabilidade, medida de Lebesgue, existência e extensão de medidas, teorema π-λ de Dynkin, teorema da classe monótona de Halmos.
3. Probabilidades denumeráveis: limites superior e inferior de sequência de eventos, eventos independentes, sub-σ-álgebras, lemas de Borel-Cantelli, lei 0-1 de Kolmogorov.
4. Variáveis aleatórias simples: definição, independência, existência de sequências independentes para sequências de medidas, valor esperado, desigualdades de Markov, Tchebyshev, Hölder e Liapunov, leis forte e fraca dos grandes números.
5. Medida: medidas gerais, medida externa, extensão de medidas, medida de Lebesgue em espaços euclidianos, funções mensuráveis, transformação de medidas, funções de distribuição, convergência fraca.

6. Integração: definição, desigualdades, densidades, mudança de variáveis, integrabilidade uniforme, integral de Lebesgue, integral de Riemann, teorema fundamental do Cálculo, medida-produto, teorema de Fubini, espaços L^p.

Bibliografia

Billingsley, Patrick (1986): *Probability and Measure*, 3ª edição, capítulos 1, 2 e 3. Mais precisamente, seções 1 a 19, menos as seções 7, 8 e 9.

Métodos Estocásticos em Economia e Finanças, 2 (1º semestre de 2018)

1. Variáveis aleatórias e esperança matemática: variáveis aleatórias e distribuições, momentos de uma variável aleatória, soma de variáveis aleatórias independentes, leis forte e fraca dos grandes números.
2. Convergência de distribuições: convergência fraca, funções características, teorema da continuidade, teorema central do limite, condições de Lindeberg e Liapunov.
3. Probabilidade condicional: decomposição de Hahn, continuidade absoluta, teorema de Radon-Nikodym, probabilidade condicional, esperança condicional.
4. Processos estocásticos: martingales em tempo discreto, submartingales, tempos de parada, desigualdades maximais de Doob, teorema do *upcrossing*, teoremas de convergência, distribuições de dimensão finita, cilindros mensuráveis, teorema de existência de Kolmogorov, movimento browniano (BM), continuidade dos caminhos amostrais do BM, não-diferenciabilidade dos caminhos amostrais do BM, propriedade forte de Markov.

Bibliografia

Billingsley, Patrick (1986): *Probability and Measure*, 3ª edição, capítulos 4, 5, 6 e 7. Mais precisamente, seções 20--22, 25--27, 32--37.

Métodos Estocásticos em Economia e Finanças, 3 (2º semestre de 2018)

1. Martingales: Tempos de parada, esperança condicional, martingales, teorema da transformada martingale, teorema do tempo de parada, submartingales e supermartingales, teorema da decomposição de Doob, desigualdades de Doob, teoremas de convergência martingale, desigualdade do *upcrossing*, integrabilidade uniforme, martingales em tempo contínuo.
2. Movimento browniano e *wavelets*: definição de movimento browniano (BM), caracterização de processos gaussianos, o espaço de Hilbert $L^2[0,1]$, representação *wavelet* do BM, leis de escalagem e inversão, continuidade dos caminhos amostrais, não-diferenciabilidade dos caminhos amostrais, BM como um martingale.
3. Integração de Itô: aproximação em H^2, isometria de Itô, definição de integral de Itô, propriedade martingale da integral de Itô, exemplos, teorema da persistência da identidade, localização por tempos de parada, a integral de Itô em L^2_{LOC}, martingales locais, teorema da representação riemanniana, a fórmula de Itô, processos de covariação quadrática.
4. Equações diferenciais estocásticas: método do *matching* de coeficientes, processos de Ornstein-Uhlenbeck, teoremas de existência e unicidade de soluções fortes, processos de difusão, a equação de difusão e métodos de solução, princípio do máximo parabólico, modelo de Black-Scholes.
5. Teoremas de representação: teorema de representação da integral estocástica, teorema da representação martingale, representação via mudança de tempo, caracterização de Lévy de um BM.
6. Teoria de Girsanov: BM com *drift*, teorema de Girsanov, variação quadrática, exponenciais martingales e condição de Novikov.
7. Fórmulas de Feynman-Kac: teorema de Feyman-Kac, fórmula de Feynman-Kac e BM's, lei do arco-seno de Lévy, aplicação do método de Feynman-Kac à EDP de Black-Scholes.

Bibliografia

Steele, J. Michael (2001): *Stochastic Calculus and Financial Applications*. Springer-Verlag, New York, 2ª edição.